一般化スペクトル理論
と
その応用

東北大学 材料科学高等研究所

千葉 逸人

二〇二一年九月十七日

①

$n \times n$ 行列 A の固有値 λ

$(\lambda - A)u = 0, \quad u \neq 0$

高々 n 個の複素数

行列 --- 有限次元ベクトル空間上の線形写像.

無限次元ベクトル空間のときは?

有限コの基底がとれない

固有値 $\rightsquigarrow$ スペクトル集合

②

$\Leftrightarrow$ $\lambda - A$ は単射でない

$\Leftrightarrow$ $\det(\lambda - A) = 0$

$\Leftrightarrow$ 逆行列

$$(z - A)^{-1} = \frac{(\text{余因子})}{\det(z - A)}$$

z の多項式

は $z = \lambda$ を特異点に持つ.

(z についての有理式)

$(z - A)^{-1}$ を A のレゾルベントという

→ $\Leftrightarrow$ $\lambda - A$ は単射でない ②

$\Leftrightarrow$ $\det(\lambda - A) = 0$ 一般化

$\Leftrightarrow$ 逆行列

$$(z-A)^{-1} = \frac{(\text{余因子})}{\det(z-A)}$$

は $z=\lambda$ を特異点に持つ

(z についての有理式)

$(z-A)^{-1}$ を A の

レゾルベント という

X : ベクトル空間 無限次元 ③

$A : X \to X$ 線形作用素

定義

レゾルベント $(z-A)^{-1}$ の

特異点全体を **スペクトル集合**

という.

固有値以外も含みうる

(一般には) 複雑な集合.

④

Ex. 1 1次元熱方程式のディリクレ問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(t, x) \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \end{cases}$$

$A = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, 1次元ラプラシアン

on $X = \{$conti. func on $[0, 1]$ s.t. $u(0) = u(1) = 0\}$

④

Ex. 1　1次元熱方程式のディリクレ問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = u(t,x) \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \end{cases}$$

$A = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$,　1次元ラプラシアン

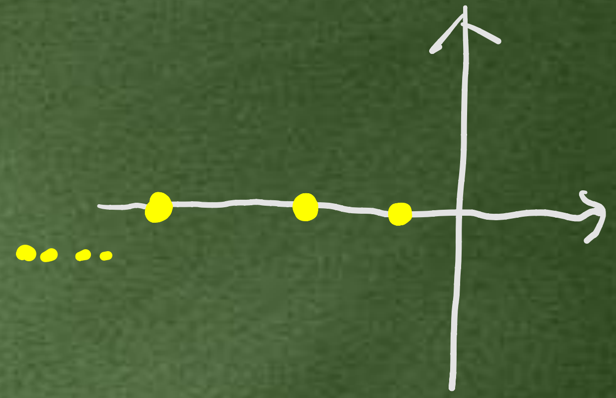
on $X = \{\text{conti. func on } [0,1]$

$\quad \text{s.t. } u(0) = u(1) = 0\}$

⑤

Aのスペクトルは固有値のみで

$$\lambda = \lambda_n = -n^2\pi^2 \quad (n \neq 0)$$



解は　$u(t,x)$

固有関数

$$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\lambda_n t} \sin(\sqrt{-\lambda_n}\, x)$$

重ね合わせの原理（固有値分解）

Ex. 2　1次元自由粒子　⑥

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \text{ on } \mathbb{R} \\ \psi : x \text{ について2乗可積分} \end{cases}$$

固有値 λ :（存在するとすれば）
定常状態のエネルギー

固有値問題　$H\psi = \lambda\psi$

→ 解なし

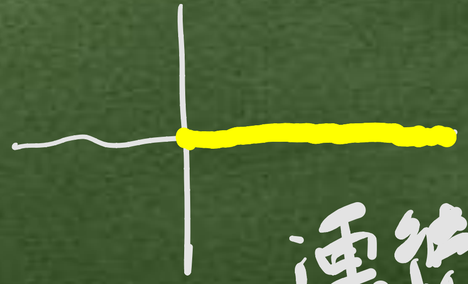
$\lambda < 0$ のとき

… 遠方で発散する解
物理的に不適

$\lambda > 0$ のとき

… $x = -\infty$ から $+\infty$ へ進む
振動数 ~ λ の波
（固有関数はない）

スペクトル集合は $\mathbb{R}_{>0}$



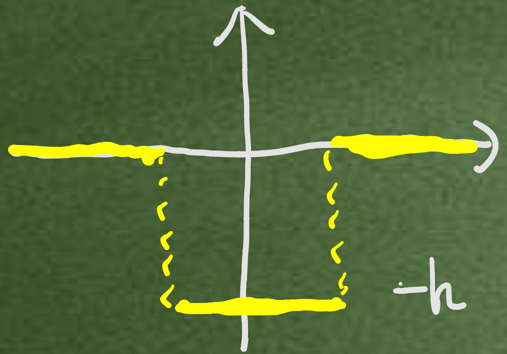
重ね合わせの原理？

連続スペクトル という

Ex. 3 井戸型ポテンシャル

⑧

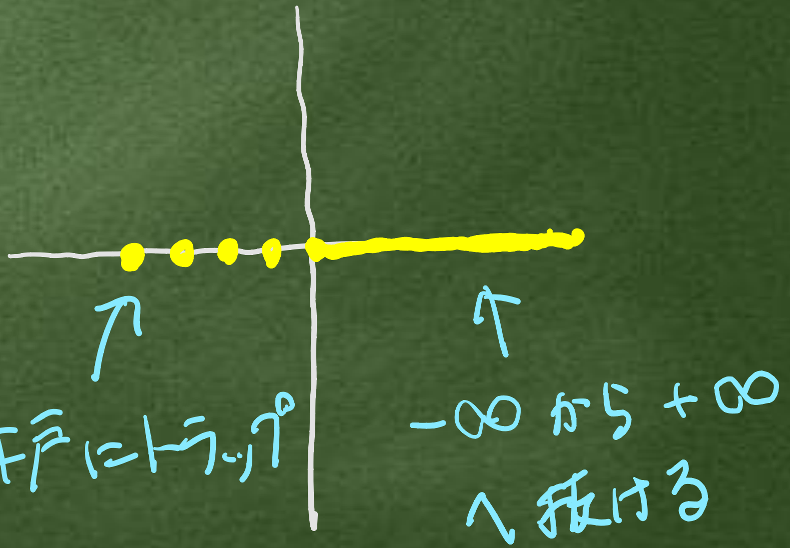
$$\begin{cases} H\psi = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) \\ V(x) = \end{cases}$$



⑨

スペクトル集合 =

- 固有値 … 区間 $-h < x < 0$ に有限個 (束縛状態)
- 連続スペクトル … $\mathbb{R}_{>0}$ (散乱状態)



X：無限次元空間 ⑩

A：X → X 線形作用素

スペクトル集合 …… レゾルベント

$(z-A)^{-1}$ の特異点全体

連続スペクトル → 扱いが難しい

- 固有関数が存在しない
- 固有値分解できない
- 関数計算ができない

⋮

⑩

X : 無限次元空間

$A : X \to X$ 線形作用素

スペクトル集合 …… レゾルベント

$(z - A)^{-1}$ の特異点全体

連続スペクトル → 扱いが難しい

- 固有関数が存在しない
- 固有値分解できない
- 留数計算ができない

⋮

⑪

→ 一般化スペクトル理論

(H.C. Adv. in Math. 2015)

X の部分空間 Y とその双対空間 Y' をとる.

Gelfand Triplet

$$Y \subset X \subset Y'$$

(だいたい) おとなしい関数たち

(だいたい) 超関数とか 測度とか

(1)

一般化スペクトル理論

(H.C. Adv. in Math. 2015)

Xの部分空間Yとその双対空間Y'をとる。

Gelfand Triplet

$$Y \subset X \subset Y'$$

(だいたい)
おとなしい関数たち

(だいたい)
超関数とか
測度とか

(2)

定理 [H.C. 2015]

作用素Aと部分空間Yが適当な条件(超ムズい)を満たすとき、Aのレゾルベント

$$(z-A)^{-1} : Y \to Y'$$

定義域と値域を制御している

は連続スペクトルを越えて非自明なRiemann面への解析接続を持つ。

定義

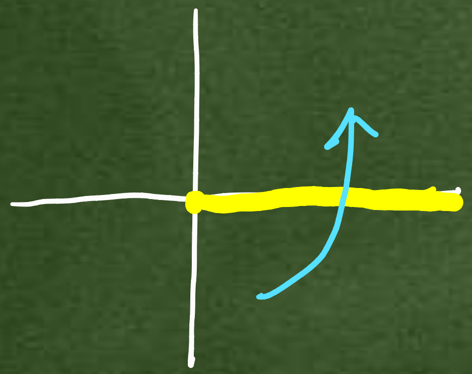
$(z-A)^{-1}$の解析接続の特異点集合を一般化スペクトルという。

例. A : self adjoint on $\mathcal{H}$ のとき

スペクトル表現

$$((\lambda - A)^{-1}\phi, \psi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - x} \underbrace{E[\phi, \psi](x)\,dx}_{\text{spec. meas.}}$$

singular on $\sigma(A) = \mathrm{supp}\, E$



下半面から $\sigma_c(A)$ を通って上半面への解析接続は

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - x} E[\phi, \psi](x)\,dx + 2\pi i E[\phi, \psi](\lambda)$$

$Y \subset \mathcal{H} \subset Y'$ の Y として

$E[\psi, \phi](\lambda)$ が（望むべき領域で）正則なもの全体をとってくればよい.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - x} E[\psi,\phi](x)\,dx + 2\pi i\, E[\phi,\psi](\lambda)$$

<u>例の例</u>　$A = -\Delta$ on $L^2(\mathbb{R}^m)$

$\sigma(A) = \mathbb{R}_{\geq 0}$

$E[\phi,\psi](x) \sim$

$(\cdots) \times \sqrt{x}^{\,m-2}\, \tilde{F}[\phi](\sqrt{x})\, \tilde{F}[\psi](\sqrt{x})$

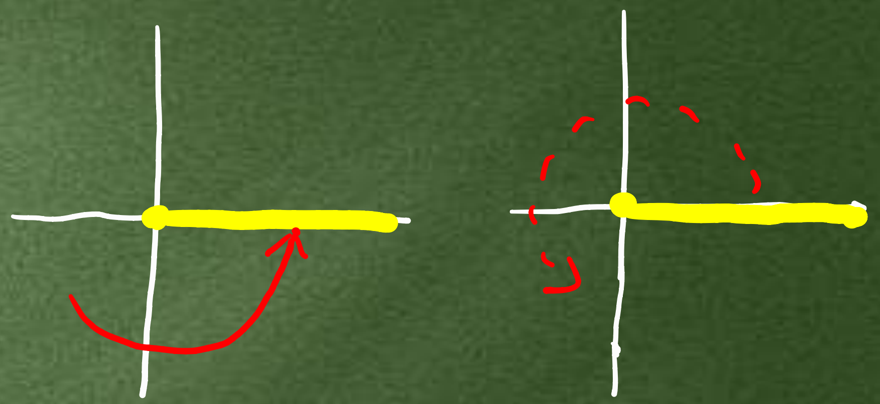
$\tilde{F}[\phi]$ が正則

$\Longleftrightarrow$ ϕ が遠方で指数的減衰

$Y = C_0^\infty(\mathbb{R}^m),\ L^2(\mathbb{R}^m, e^{a|x|}dx)$, etc.

$\sigma_c(A)$ の端点は $(\lambda - A)^{-1}$ の解析接続の分岐点.

$A = -\Delta$ on $L^2(\mathbb{R}^m)$



m : odd $\longrightarrow$ Riemann 面は $\sqrt{\lambda}$

m : even $\longrightarrow$ 〃 は $\log \lambda$

$(\lambda - A)^{-1}$ の計算，一般には難しい．

$A = \underset{\text{well-known}}{\underline{H}} + K$ （cf. $A = -\Delta + V(x)$）のとき，

$$(\lambda - A)^{-1} = (\lambda - H - K)^{-1}$$

$$= (\lambda - H)^{-1} \circ (id - K(\lambda - H)^{-1})^{-1}$$

$\downarrow$ analy. conti.

$$= \underset{\text{well-known}}{\underline{A(\lambda)}} \circ (id - KA(\lambda))^{-1} =: R_\lambda : Y \to Y'$$

$A = H + K$ の一般化スペクトル $\hat{\sigma}(A)$

w.r.t. $Y \subset \mathcal{H} \subset Y'$ について，

Thm (H.C. 2015)

- $(id - KA(\lambda))\mu = 0$, $\mu \in Y'$, $\mu \neq 0$

$\Rightarrow \lambda \in \hat{\sigma}(A)$

- $A^\times \mu = \lambda \mu$ （$A^\times$: dual op.）
- $\mu \in \mathrm{Im}\left[\oint R_z \, dz\right]$ （Riesz proj の像）
- K が H に対して rela. compact.

$\Rightarrow$ 上で定まる $\lambda \in \hat{\sigma}(A)$ は高々可算．

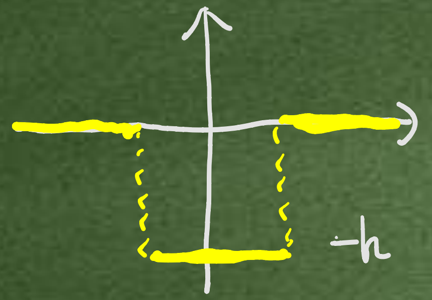
$\mathrm{Im}\left[\oint R_z \, dz\right]$ は有限次元．

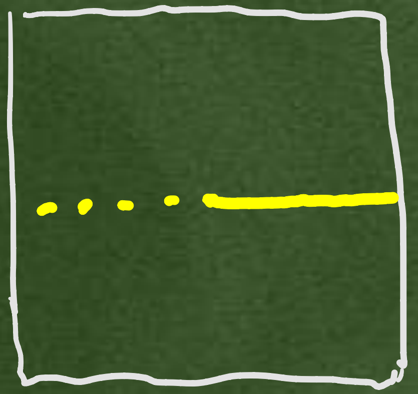
- $Y_1 \subset Y_2 \subset \mathcal{H} \subset Y_2' \subset Y_1'$ なら

$\hat{\sigma}(A; Y_1) \subset \hat{\sigma}(A; Y_2)$ かつ …

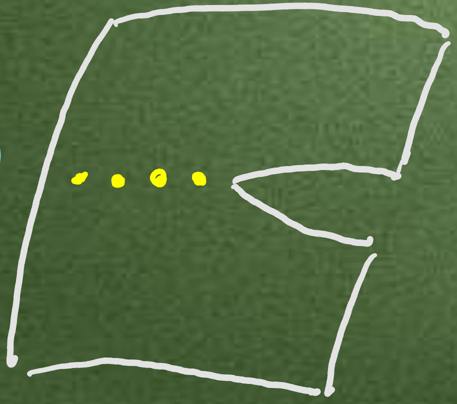
応用1. シュレディンガー方程式 (H.C. 2018)

$$\begin{cases} H\psi = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V(x) \quad \text{on } \mathbb{R} \\ V(x) = \end{cases}$$



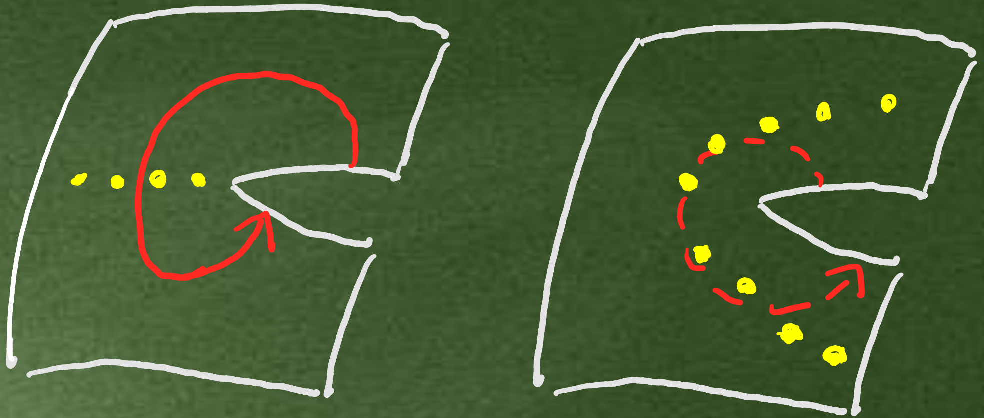


フツーのスペクトル



連続スペクトルに沿ってカット

1枚目　　2枚目



コピーを2つ用意して切り口ではり合わせる ($\sqrt{z}$ の Riemann 面)

2枚目の上に $(z-A)^{-1}$ の特異点が見つかる.

→ 一般化固有値

(トンネル効果の数学的特徴付け)

応用2 蔵本モデル

同期現象の標準モデル

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N} \underline{a_{ij}}\sin(\theta_j-\theta_i)$$

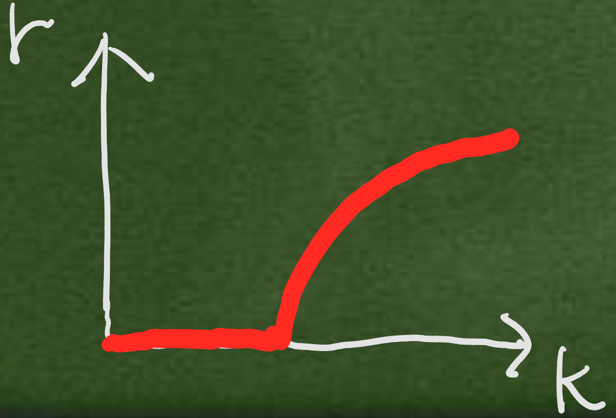
ネットワーク構造

v.s.

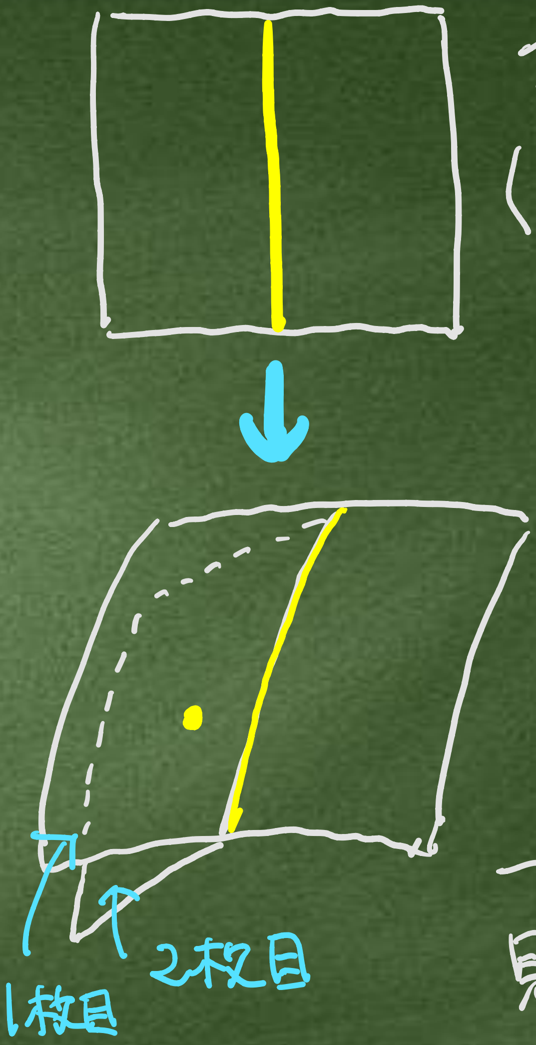
ダイナミクス

K : 結合強度

蔵本予想 (1984)



非同期状態から
同期状態への
相転位に関する
(元) 未解決問題



ブリーのスペクトル
(虚軸全体)

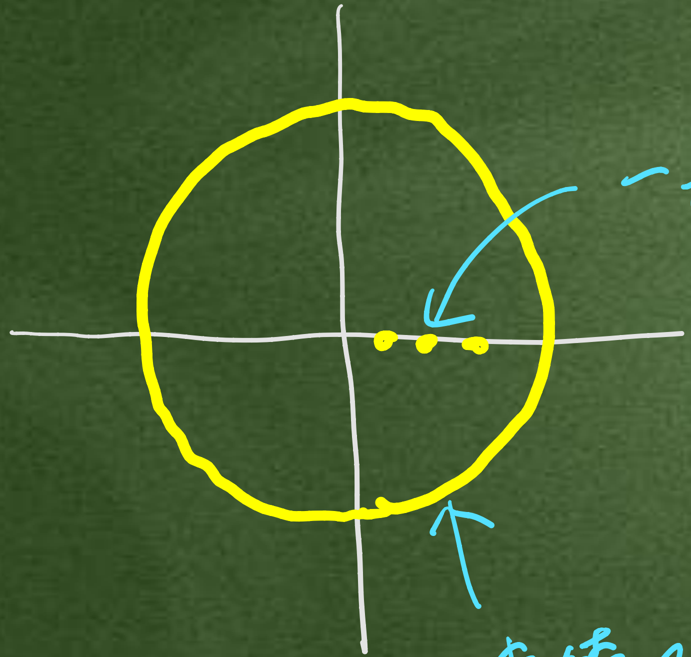
虚軸に沿って
カットしてコピーを
はり合わせ.
2枚目の上に
一般化固有値が
見つかる.

→ 蔵本予想の解決 (H.C, 2013)

応用3. 離散力学系の転送作用素 (in progress) ⑮

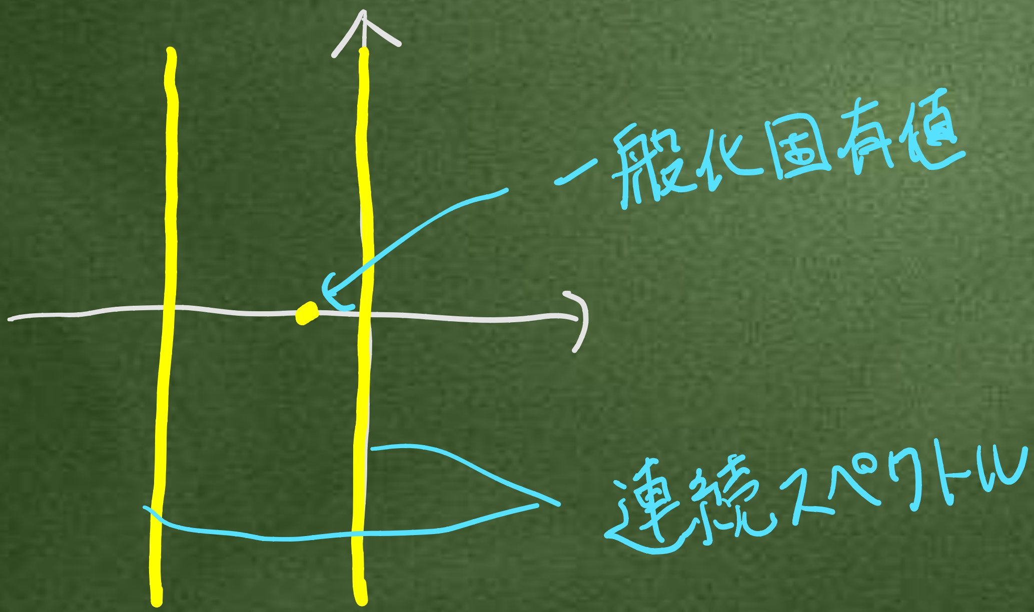
(Perron-Frobenius op.) with Ikeda, Ishikawa さん

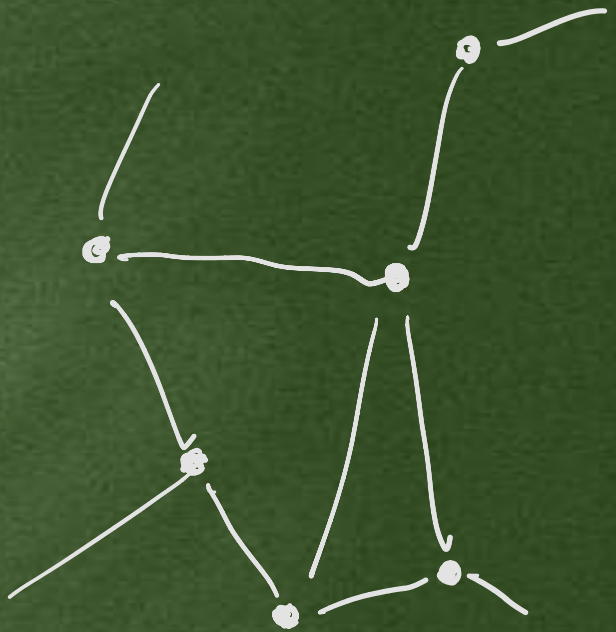
⟶ カオスの振るまい



応用4　発電所の配電網 (in progress) with Medvedev　⑯

→ 電圧の同期が起こるための
　最適なネットワークの設計

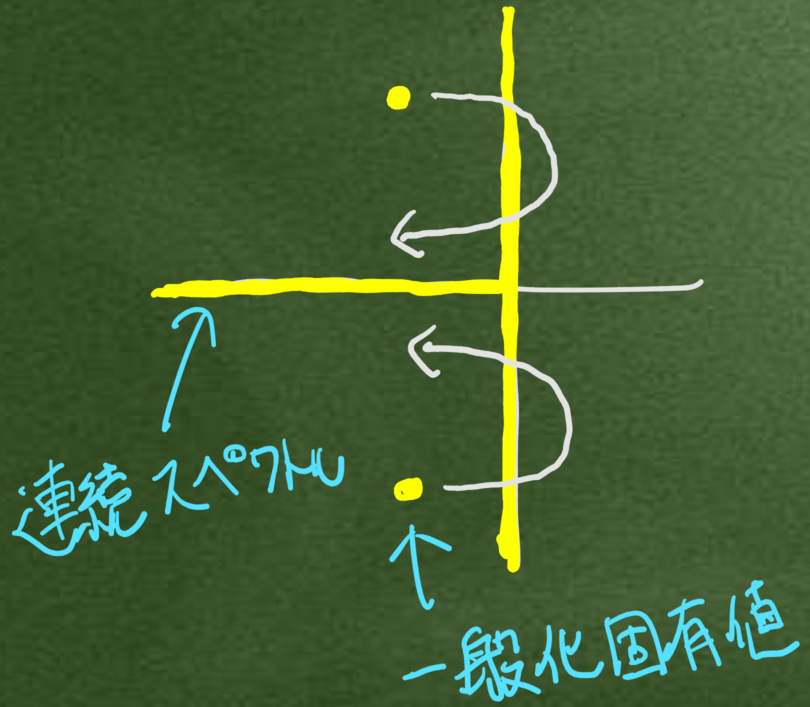




応用5　脳神経細胞の同期発火　with K. Kotani

⑰

→ 安定な脳波の発現 $\begin{cases} \gamma \text{ 波（認知・記憶）（submitted）} \\ \delta \text{ 波（睡眠）　（in progress）} \end{cases}$



参考文献

- 俺